Teoria miary
WPPT IIr. semestr letni 2008
EGZAMIN PODSTAWOWY

18 czerwca 2008

Definicja Dwie miary μ, ν nazywamy *równoważnymi*, co zapisjujemy $\mu \approx \nu$ jeśli jednocześnie

$$\mu \ll \nu \ \text{ i } \ \nu \ll \mu.$$

Zadanie 1. Na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{F})$ dane są dwie miary nieujemne skończone μ i ν. Wiadomym jest, że $\mu = \mu_1 + \mu_2$, gdzie

$$\mu_1 \ll \nu \ \text{ i } \ \mu_2 \perp \nu.$$

Podobnie $\nu = \nu_1 + \nu_2$, gdzie

$$\nu_1 \ll \mu \ \text{ i } \ \nu_2 \perp \mu.$$

Udowodnij, że $\mu_1 \approx \nu_1$.

ROZW.: Niech D spełnia $\mu_2(D) = 0, \nu(D^c) = 0$. Weźmy dowolny zbiór A spełniający $\mu_1(A) = 0$. Wtedy $A \cap D$ jest zerowy dla μ_1 i dla μ_2, czyli jest zerowy dla μ, zatem i dla ν_1. Natomiast $A \cap D^c$ jest zerowy dla ν, więc tym bardziej dla ν_1. Stąd cały zbiór A jest zerowy dla ν_1. Dowiedliśmy, że $\nu_1 \ll \mu_1$. Przeciwną absolutną ciągłość dowodzi się symetrycznie.

INNY SPOSÓB: Z Tw. Radona-Nikodyma, $d\mu_1 = f\,d\nu = f\,d\nu_1 + f\,d\nu_2$. Miara $f\,d\nu_2$ jest oczywiście absolutnie ciągła względem ν_2. Z drugiej strony jest ona absolutnie ciągła względem μ_1, która jest singularna względem ν_2, zatem $f\,d\nu_2$ jest również singularna względem ν_2. Zatem $f\,d\nu_2$ jest miarą zerową, co daje, że $d\,\mu_1 = f\,d\nu_1$, czyli $\mu_1 \ll \nu_1$.

Zadanie 2. Mamy dwie przestrzenie z miarami nieujemnymi skończonymi: $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$. Na sigma-ciele produktowym dana jest miara ξ absolutnie ciągła względem $\mu \times \nu$ i niech $f(x, y)$ oznacza odpowiednią gęstość. Wykaż, że miara marginalna ξ_X jest absolutnie ciągła względem μ i podaj wzór na odpowiednią gęstość.

ROZW.: Określmy $F(x) = \int f(x, y)\,d\nu(y)$ (co inaczej można zapisać jako $\int f_x\,d\nu$). Niech $A \in \mathcal{F}$. Mamy

$$\xi_X(A) = \xi(A \times Y) = \int_{A\times Y} f\,d(\mu \times \nu) \overset{\text{Tw. Fub.}}{=\!=} \int_A \left[\int_Y f_x\,d\nu\right] d\mu(x) = \int_A F(x)\,d\mu.$$

Zatem $\xi_X \ll \mu$ a gęstością jest F.

Zadanie 3. Na przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{F}, \mu)$ dany jest ciąg funkcji nieujemnych mierzalnych f_n zbieżny prawie wszędzie do zera, ale taki, że całki $\int f_n\,d\mu$ nie dążą do zera. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \sup_n f_n(x)$ ma całkę nieskończoną.

ROZW.: Gdyby funkcja g miała całkę skończoną, to ciąg f_n byłby zmajoryzowany (przez g) i z Tw. Lebesgue'a zachodziłaby zbieżność całek

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int \lim_n f_n \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

A tak nie jest.

Zadanie 4. Dla miary znakowanej μ (powiedzmy ograniczonej z góry) wykaż, że $\mu^+ \vee \mu^- = |\mu|$.

ROZW.: Mamy

$$\mu^+ \vee \mu^- = \tfrac{1}{2}(\mu^+ + \mu^- + |\mu^+ - \mu^-|) = \tfrac{1}{2}(|\mu| + |\mu|) = |\mu|.$$

Zadanie 5. Udowodnij, korzystając z Tw. Riesza dla przestrzeni zwartych, że każdy funkcjonał ograniczony na przestrzeni $C([0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \cdots)$ (z normą supremum) jest miarą borelowską skończoną na $[0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \cdots$.

ROZW.: Oznaczmy przez X_n n-ty przedział wchodzący w skład powyższej dziedziny X. Każda funkcja ciągła f na X przedstawia sie jako suma funkcji ciągłych $f_n = \mathbf{1}_{X_n} f$. Funcjonał χ obcięty do funkcji postaci $\mathbf{1}_{X_n} f$ jest funcjonałem χ_n na $C(X_n)$. Zatem z twierdzenia Riesza (X_n jest zwarta) istnieje miara skończona μ_n na X_n taka, że $\chi_n(f_n) = \int f_n \, d\mu_n$. Zatem przyjmując za μ miarę (na razie sigma-skończoną) $\mu = \sum_n \mu_n$ możemy napisać:

$$\chi(f) = \chi(\sum_n f_n) = \sum_n \chi(f_n) = \sum_n \chi_n(f_n) = \sum_n \int f_n \, d\mu_n = \sum_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Trzeba tylko pokazać, że miara μ jest skończona. Ale to jest teraz oczywiste, bo $\mu(X) = \chi(\mathbf{1}) < \infty$.

Zadanie 6. Sformułuj Twierdzenie Poincaré (z definicjami wszystkich potrzebnych pojęć).
Patrz wykład.

CZĘŚĆ NA OCENĘ CELUJĄCĄ:

ROZW. DODATKU DO ZADANIA 2: Gęstością miary ξ_x jest $\frac{f(x,y)}{\int f(x,y) d\nu(y)}$, a jeśli całka w mianowniku jest zero, to zero. Pomijam sprawdzenie.

ROZW. WERSJI ZADANIA 5: Przestrzeń $C_0[0,1)$ jest izomorficzna z podprzestrzenią domkniętą $C_0 = C_0[0,1] \subset C = C[0,1]$ funkcji zerujących się w 1. Weźmy funkcjonał ϕ na C_0. Trzeba go przedłużyć do funkcjonału Φ na C tak aby miara reprezetująca Φ (Tw Riesza) nie miała atomu w punkcie 1. Wtedy taka miara jest miarą na $[0,1)$. Każda $f \in C$ rozkłada się tak $f = f - f(1) + f(1) = f_1 + c$, gdzie $f_1 \in C_0$, a c jest funkcją stałą. Jakkolwiek określimy Φ, będzie tak:

$$\Phi(f) = \Phi(f_1) + \Phi(c).$$

Ponieważ chcemy aby na C_0 $\Phi = \phi$, musimy zadać $\Phi(f_1) = \phi(f_1)$. Na przestrzeni funkcji stałych c każdy funkcjonał ma postać $\Phi(c) = kc$, gdzie k jest stałą. Trzeba więc dobrać stałą k tak aby miara μ reprezentująca Φ nie miała atomu w 1. Część z państwa przyjęła $k = 1$, ale to jest źle. Trzeba przyjąć $k = \|\phi\| = \sup\{\phi(f) : f \in C_0, \|f\| \leq 1\}$. Sprwdzenie pomijam (trzeba scałkować miarą μ funkcję $\mathbf{1}_{\{1\}}$ przybliżając ją funkcjami ciągłymi). Rachunki są łatwe, jeśli się założy nieujemność funkcjonału ϕ.

Tomasz Downarowicz